VESTIBULAR 2007 – 2ª FASE

GABARITO — MATEMÁTICA

Questão 01 (Valor: 10 pontos)

Seja t o tempo transcorrido, a partir da abertura dos dois tanques e V o volume dos mesmos.
Após t horas o volume dos dois tanques será:

1º tanque: $V_1 = V - \frac{t}{4}V = \frac{4V - tV}{4}$ (1)

2º tanque: $V_2 = V - \frac{t}{5}V = \frac{5V - tV}{5}$ (2)

Procura-se o valor de t para que $V_1 = 0{,}75V_2$, ou seja, $V_1 = \frac{3}{4}V_2$ (3)

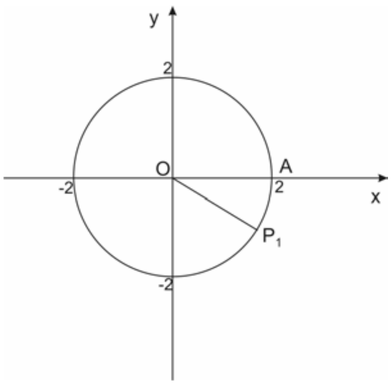
Usando-se (1), (2) e (3) acima obtém-se:

$$\frac{4V - tV}{4} = \frac{3}{4}\frac{5V - tV}{5} \Rightarrow 20V - 5tV = 15V - 3tV \Rightarrow 5V = 2tV \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

Logo, o tempo necessário é igual a 2 horas e 30 minutos

Questão 02 (Valor: 20 pontos)

Se o comprimento do arco AP_1 é $\frac{\pi}{3}$ e a circunferência tem raio 2, então a medida em radianos do ângulo AOP_1 é $\frac{\pi/3}{2} = \frac{\pi}{6}$.



Os pontos P_1, P_2, P_3 dividem a circunferência em três arcos iguais, subtendendo ângulos de $\frac{2\pi}{3}$. Logo, os afixos correspondem a

$$z_1 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{6})\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2})\right) = 2i$$

$$z_3 = 2\left(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})\right) = 2\left(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{7\pi}{6})\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$\left|\overline{z_1} + z_2^5 + z_3\right| = \left|\sqrt{3} + i + 2^5 i^5 - \sqrt{3} - i\right| = \left|2^5 i\right| = 2^5 = 32$$

Questão 03 (Valor: 15 pontos)

Sendo Y_a a temperatura ambiente, Y_a = 25°C. Logo, $Y(t) = 25 + Be^{kt}$. Usando

Y(0) = 75°C e Y(1) = 50°C obtém-se o seguinte sistema $\begin{cases} 75 = 25 + B & (1) \\ 50 = 25 + Be^{k} & (2) \end{cases}$

Da equação (1) tem-se B = 50. Substituindo-se o valor de B em (2), obtém-se

$$50 - 25 = 50e^{k} \Rightarrow e^{k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\ln 2$$

Assim, $Y(t) = 25 + 50e^{-\ln 2t}$. Para se obter o valor de t tal que Y = 37,5°C resolve-se a equação

$$37{,}5 = 25 + 50e^{-\ln 2t} \Rightarrow e^{-\ln 2t} = \frac{12{,}5}{50} \Rightarrow e^{-\ln 2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow -\ln 2\, t = -\ln 4 \Rightarrow t = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$$

Logo, a temperatura do corpo será de 37,5°C depois de 2 minutos.

Questão 04 (Valor: 15 pontos)

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \operatorname{sen}2x \geq \operatorname{sen}x \Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x \geq \operatorname{sen}x \Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x - \operatorname{sen}x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x(2\cos x - 1) \geq 0$$

Tem-se duas condições a considerar para resolver a última desigualdade acima:

(i) $\operatorname{sen}x \geq 0$ e $2\cos x - 1 \geq 0$ **ou**

(ii) $\operatorname{sen}x \leq 0$ e $2\cos x - 1 \leq 0$

Analisando as duas condições no intervalo $[0,2\pi]$**:**

(i) $\begin{cases} \operatorname{sen}x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi \quad \text{ou} \quad x = 2\pi \\ \text{e} \\ 2\cos x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup \{2\pi\} \quad (\mathrm{I})$

(ii) $\begin{cases} \operatorname{sen}x \leq 0 \Rightarrow \pi \leq x \leq 2\pi \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ \text{e} \\ 2\cos x - 1 \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\pi, \frac{5\pi}{3}] \cup \{0\} \quad (\mathrm{II})$

A solução é (I) ∪ (II), ou seja, $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right] \cup \{2\pi\}$

Questão 05 (Valor: 20 pontos)

Sendo A = (a_{ij}) uma matriz simétrica tem-se que $a_{ij} = a_{ji}$.

- Da condição I, obtém-se os elementos a_{12}, a_{21}, a_{23}, e a_{32} cujos valores correspondem à distância dos pontos P e Q, intersecções da parábola $y = x^2 - 2x + 1$ com a reta $y = -x + 1$.

Resolvendo-se o sistema $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$, obtém-se x = 0 ou x = 1

Para x = 0 encontra-se y = 1 e para x = 1 encontra-se y = 0, assim P(0,1) e Q(1,0) ou P(1, 0) e Q(0, 1) e a distância entre P e Q é $\sqrt{2}$

Logo, $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = \sqrt{2}$

- Da condição II. obtém-se os elementos a_{13} e a_{31} cujos valores correspondem à área do triângulo PQR, sendo R o simétrico de Q em relação à origem e portanto R(–1, 0) se Q (1, 0) ou R (0, –1) se Q (0,1)

A área do triângulo PQR em qualquer caso é igual a 1.
Logo, $a_{13} = a_{31} = 1$.

- Da condição III, obtém-se os elementos da diagonal a_{11}, a_{22} e a_{33}. cujos valores correspondem ao valor máximo da função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x$.

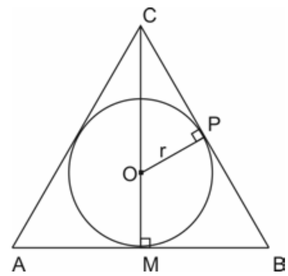
A função quadrática tem valor máximo que ocorre para x = $\frac{-4}{2(-2)} = 1$. Logo, o valor máximo é f(1) = 2 e $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2$.

A matriz é $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ e o determinante $\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 2 - 2 - 4 - 4 = 2$

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

O volume solicitado é igual ao volume do prisma, V_p, menos o volume do cilindro, V_c.

Consideremos a base do prisma o triângulo ABC de lado ℓ, O o centro da circunferência inscrita e P um ponto de tangência do triângulo com a circunferência. Logo OP é perpendicular a BC, e os triângulos retângulos BMC e OPC são semelhantes. Assim



$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{CP}} \Rightarrow \frac{\ell/2}{h} = \frac{r}{\ell/2} \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = rh \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = \frac{r\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2 - 2r\ell\sqrt{3}}{4} = 0 \Rightarrow \ell = 2r\sqrt{3}$$

$V_p = 10S_b$ e $S_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12r^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$. Logo, $V_p = 30r^2\sqrt{3}$

$V_c = 10\pi r^2$

$V_{solicitado} = (30r^2\sqrt{3} - 10\pi r^2) = 10r^2(3\sqrt{3} - \pi)$ cm^3

Em 17 de dezembro de 2006

Nelson Almeida e Silva Filho
Diretor do SSOA/UFBA